Towards Higher Observational Type Theory

Ambrus Kaposi

Eötvös Loránd University, Budapest

j.w.w. Thorsten Altenkirch, Mike Shulman, and Szumi Xie

SSTT 2026
Ljubljana
5 June 2026

What is the identity type?

- Per Martin-Löf:

$$\mathsf{data}\ \mathsf{Id}_{(A:\mathsf{Type})}\ (a : A) : A \longrightarrow \mathsf{Type}$$
$$\mathsf{refl} : \mathsf{Id}_A\, a\, a$$

What is the identity type?

- Per Martin-Löf:

$$\mathsf{data}\ \mathsf{Id}_{(A:\mathsf{Type})}\ (a : A) : A \longrightarrow \mathsf{Type}$$
$$\mathsf{refl} : \mathsf{Id}_A\, a\, a$$

- Cubical Type Theory: $\mathbb{I} \longrightarrow A$

What is the identity type?

- Per Martin-Löf:

$$\mathsf{data}\ \mathsf{Id}_{(A:\mathsf{Type})}\ (a : A) : A \longrightarrow \mathsf{Type}$$
$$\mathsf{refl} : \mathsf{Id}_A\, a\, a$$

- Cubical Type Theory: $\mathbb{I} \longrightarrow A$

- Observational Type Theory (OTT):

$$\mathsf{Id}_{A\times B}\,(a_0, b_0)\,(a_1, b_1) := \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1 \times \mathsf{Id}_B\, b_0\, b_1$$

What is the identity type?

- Per Martin-Löf:

$$\text{data } \mathsf{Id}_{(A:\mathsf{Type})}\,(a : A) : A \longrightarrow \mathsf{Type}$$
$$\mathsf{refl} : \mathsf{Id}_A\, a\, a$$

- Cubical Type Theory: $\mathbb{I} \longrightarrow A$
- Observational Type Theory (OTT):

$$\mathsf{Id}_{A\times B}\,(a_0, b_0)\,(a_1, b_1) := \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1 \times \mathsf{Id}_B\, b_0\, b_1$$
$$\text{data } \mathsf{Id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \mathsf{Prop}$$
$$\mathsf{zero} : \mathsf{Id}_{\mathbb{N}}\, \mathsf{zero}\, \mathsf{zero}$$
$$\mathsf{suc} : \mathsf{Id}_{\mathbb{N}}\, n_0\, n_1 \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathbb{N}}\,(\mathsf{suc}\, n_0)\,(\mathsf{suc}\, n_1)$$

What is the identity type?

- Per Martin-Löf:

$$\begin{aligned} \text{data } \mathsf{Id}_{(A:\mathsf{Type})}\ (a : A) : A \to \mathsf{Type} \\ \mathsf{refl} : \mathsf{Id}_A\ a\ a \end{aligned}$$

- Cubical Type Theory: $\mathbb{I} \to A$
- Observational Type Theory (OTT):

$$\mathsf{Id}_{A\times B}\ (a_0, b_0)\ (a_1, b_1) := \mathsf{Id}_A\ a_0\ a_1 \times \mathsf{Id}_B\ b_0\ b_1$$

$$\begin{aligned} &\text{data } \mathsf{Id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathsf{Prop} \\ &\quad \mathsf{zero} : \mathsf{Id}_{\mathbb{N}}\ \mathsf{zero}\ \mathsf{zero} \\ &\quad \mathsf{suc} : \mathsf{Id}_{\mathbb{N}}\ n_0\ n_1 \to \mathsf{Id}_{\mathbb{N}}\ (\mathsf{suc}\ n_0)\ (\mathsf{suc}\ n_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{codata } \mathsf{Id}_{\mathsf{Stream}_A} : \mathsf{Stream}_A \to \mathsf{Stream}_A \to \mathsf{Prop} \\ &\quad \mathsf{head} : \mathsf{Id}_{\mathsf{Stream}_A}\ s\ s' \to \mathsf{Id}_A\ (\mathsf{head}\ s)\ (\mathsf{head}\ s') \\ &\quad \mathsf{tail} : \mathsf{Id}_{\mathsf{Stream}_A}\ s\ s' \to \mathsf{Id}_{\mathsf{Stream}_A}\ (\mathsf{tail}\ s)\ (\mathsf{tail}\ s') \end{aligned}$$

What is the identity type?

- Per Martin-Löf:

$$\mathsf{data}\ \mathsf{Id}_{(A:\mathsf{Type})}\ (a : A) : A \longrightarrow \mathsf{Type}$$
$$\mathsf{refl} : \mathsf{Id}_A\, a\, a$$

- Cubical Type Theory: $\mathbb{I} \longrightarrow A$

- Observational Type Theory (OTT):

$$\mathsf{Id}_{A \times B}\,(a_0, b_0)\,(a_1, b_1) := \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1 \times \mathsf{Id}_B\, b_0\, b_1$$
$$\mathsf{data}\ \mathsf{Id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \mathsf{Prop}$$
$$\mathsf{zero} : \mathsf{Id}_{\mathbb{N}}\, \mathsf{zero}\, \mathsf{zero}$$
$$\mathsf{suc} : \mathsf{Id}_{\mathbb{N}}\, n_0\, n_1 \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathbb{N}}\, (\mathsf{suc}\, n_0)\, (\mathsf{suc}\, n_1)$$
$$\mathsf{codata}\ \mathsf{Id}_{\mathsf{Stream}_A} : \mathsf{Stream}_A \longrightarrow \mathsf{Stream}_A \longrightarrow \mathsf{Prop}$$
$$\mathsf{head} : \mathsf{Id}_{\mathsf{Stream}_A}\, s\, s' \longrightarrow \mathsf{Id}_A\, (\mathsf{head}\, s)\, (\mathsf{head}\, s')$$
$$\mathsf{tail} : \mathsf{Id}_{\mathsf{Stream}_A}\, s\, s' \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathsf{Stream}_A}\, (\mathsf{tail}\, s)\, (\mathsf{tail}\, s')$$
$$\mathsf{Id}_{\mathsf{Set}}\, A\, B := \text{equality of codes}$$

What is the identity type?

- Per Martin-Löf:

$$\text{data } \mathsf{Id}_{(A:\mathsf{Type})}\ (a : A) : A \to \mathsf{Type}$$
$$\mathsf{refl} : \mathsf{Id}_A\, a\, a$$

- Cubical Type Theory: $\mathbb{I} \to A$

- Higher Observational Type Theory (HOTT):

$$\mathsf{Id}_{A\times B}\,(a_0, b_0)\,(a_1, b_1) := \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1 \times \mathsf{Id}_B\, b_0\, b_1$$
$$\text{data } \mathsf{Id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathsf{Type}$$
$$\mathsf{zero} : \mathsf{Id}_{\mathbb{N}}\, \mathsf{zero}\, \mathsf{zero}$$
$$\mathsf{suc} : \mathsf{Id}_{\mathbb{N}}\, n_0\, n_1 \to \mathsf{Id}_{\mathbb{N}}\, (\mathsf{suc}\, n_0)\, (\mathsf{suc}\, n_1)$$
$$\text{codata } \mathsf{Id}_{\mathsf{Stream}_A} : \mathsf{Stream}_A \to \mathsf{Stream}_A \to \mathsf{Type}$$
$$\mathsf{head} : \mathsf{Id}_{\mathsf{Stream}_A}\, s\, s' \to \mathsf{Id}_A\, (\mathsf{head}\, s)\, (\mathsf{head}\, s')$$
$$\mathsf{tail} : \mathsf{Id}_{\mathsf{Stream}_A}\, s\, s' \to \mathsf{Id}_{\mathsf{Stream}_A}\, (\mathsf{tail}\, s)\, (\mathsf{tail}\, s')$$
$$\mathsf{Id}_{\mathsf{Type}}\, A\, B := A \simeq B$$

Promises of HOTT

+ Explainable

Promises of HOTT

- + Explainable
- + Definitional univalence:

$$\dfrac{\dfrac{f : A \longrightarrow B \qquad \mathsf{isEquiv}(f)}{\mathsf{univalence}(f) : \mathsf{Id}_{\mathsf{Type}}\, A\, B}}{\mathsf{transport}_{\lambda X.X}\,(\mathsf{univalence}(f)) : A \longrightarrow B}$$

Promises of HOTT

+ Explainable
+ Definitional univalence:

$$\dfrac{\dfrac{f : A \to B \qquad \mathsf{isEquiv}(f)}{\mathsf{univalence}(f) : \mathsf{Id}_{\mathsf{Type}}\, A\, B}}{\mathsf{transport}_{\lambda X.X}\,(\mathsf{univalence}(f)) = f}$$

Promises of HOTT

- + Explainable
- + Definitional univalence:

$$\dfrac{\dfrac{f : A \to B \qquad \mathsf{isEquiv}(f)}{\mathsf{univalence}(f) : \mathsf{Id}_{\mathsf{Type}}\, A\, B}}{\mathsf{transport}_{\lambda X.X}\,(\mathsf{univalence}(f)) = f}$$

- + Efficient

Promises of HOTT

+ Explainable
+ Definitional univalence:

$$\dfrac{\dfrac{f : A \to B \qquad \mathsf{isEquiv}(f)}{\mathsf{univalence}(f) : \mathsf{Id}_{\mathsf{Type}}\, A\, B}}{\mathsf{transport}_{\lambda X.X}\,(\mathsf{univalence}(f)) = f}$$

+ Efficient

– Higher inductive types only work in the empty context; computation rules for higher constructors are typal

Why is OTT → HOTT difficult?

Computation in OTT:

$$\mathsf{coe} : (A_0\, A_1 : \mathsf{Set}) \to \mathsf{Id}_{\mathsf{Set}}\, A_0\, A_1 \to A_0 \to A_1$$

Why is OTT → HOTT difficult?

Computation in OTT:

$$\mathsf{coe} : (A_0\, A_1 : \mathsf{Set}) \to \mathsf{Id}_{\mathsf{Set}}\, A_0\, A_1 \to A_0 \to A_1$$
$$\mathsf{coe}\,(A_0 \times B_0)\,(A_1 \times B_1)\, \_\, w :=$$

Why is OTT $\longrightarrow$ HOTT difficult?

Computation in OTT:

$$\mathsf{coe} : (A_0\, A_1 : \mathsf{Set}) \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathsf{Set}}\, A_0\, A_1 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1$$

$$\mathsf{coe}\, (A_0 \times B_0)\, (A_1 \times B_1)\, \_\, w := (\mathsf{coe}\, A_0\, A_1\, \_\, (\mathsf{fst}\, w), \mathsf{coe}\, B_0\, B_1\, \_\, (\mathsf{snd}\, w))$$

Why is OTT → HOTT difficult?

Computation in OTT:

$$\mathsf{coe} : (A_0\, A_1 : \mathsf{Set}) \to \mathsf{Id}_{\mathsf{Set}}\, A_0\, A_1 \to A_0 \to A_1$$

$$\mathsf{coe}\,(A_0 \times B_0)\,(A_1 \times B_1)\,\_\,w := (\mathsf{coe}\, A_0\, A_1\,\_\,(\mathsf{fst}\, w), \mathsf{coe}\, B_0\, B_1\,\_\,(\mathsf{snd}\, w))$$

$$\mathsf{ap}_f : \mathsf{Id}_A\, a_0\, a_1 \to \mathsf{Id}_B\,(f\, a_0)\,(f\, a_1)$$

Why is OTT $\longrightarrow$ HOTT difficult?

Computation in HOTT:

$$\mathsf{coe} : (A_0\,A_1 : \mathsf{Type}) \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathsf{Type}}\,A_0\,A_1 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1$$

$$\mathsf{coe}\,A_0\,A_1\,(\mathsf{univalence}(f,e))\,a_0 := f(a_0)$$

$$\mathsf{ap}_F : \mathsf{Id}_{\mathsf{Type}}\,A_0\,A_1 \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathsf{Type}}\,(F\,A_0)\,(F\,A_1)$$

Parametricity

- abstract types algebraically:

Parametricity

- abstract types algebraically:
  - $\alpha : (X : \mathsf{Type}) \to X \to X$ says that every type is equipped with a "set with endofunction" algebra

Parametricity

- abstract types algebraically:
  - $\alpha : (X : \mathsf{Type}) \to X \to X$ says that every type is equipped with a "set with endofunction" algebra
  - every function $f : A \to B$ is a "set with endofunction"-homomorphism, i.e. $f\ (\alpha_A\ a) = \alpha_B\ (f\ a)$

Parametricity

- abstract types algebraically:
  - $\alpha : (X : \mathsf{Type}) \to X \to X$ says that every type is equipped with a "set with endofunction" algebra
  - every function $f : A \to B$ is a "set with endofunction"-homomorphism, i.e. $f\ (\alpha_A\ a) = \alpha_B\ (f\ a)$
  - given an $a_0 : A$, we choose $f : A \to A$ with $f\ x := a_0$, then:

$$a_0 = f\ (\alpha_A\ a_0) = \alpha_A\ (f\ a_0) = \alpha_A\ a_0$$

Parametricity

- abstract types algebraically:
  - $\alpha : (X : \mathsf{Type}) \to X \to X$ says that every type is equipped with a "set with endofunction" algebra
  - every function $f : A \to B$ is a "set with endofunction"-homomorphism, i.e. $f\,(\alpha_A\, a) = \alpha_B\,(f\, a)$
  - given an $a_0 : A$, we choose $f : A \to A$ with $f\, x := a_0$, then:

$$a_0 = f\,(\alpha_A\, a_0) = \alpha_A\,(f\, a_0) = \alpha_A\, a_0$$

- $\alpha : (N : \mathsf{Type}) \to N \to (N \to N) \to N$ is not algebraic

Parametricity

- abstract types algebraically:
  - $\alpha : (X : \mathsf{Type}) \to X \to X$ says that every type is equipped with a "set with endofunction" algebra
  - every function $f : A \to B$ is a "set with endofunction"-homomorphism, i.e. $f\ (\alpha_A\ a) = \alpha_B\ (f\ a)$
  - given an $a_0 : A$, we choose $f : A \to A$ with $f\ x := a_0$, then:

$$a_0 = f\ (\alpha_A\ a_0) = \alpha_A\ (f\ a_0) = \alpha_A\ a_0$$

- $\alpha : (N : \mathsf{Type}) \to N \to (N \to N) \to N$ is not algebraic
- Reynolds (1983): preservation of relations:

Parametricity

- abstract types algebraically:
  - $\alpha : (X : \mathsf{Type}) \to X \to X$ says that every type is equipped with a "set with endofunction" algebra
  - every function $f : A \to B$ is a "set with endofunction"-homomorphism, i.e. $f\ (\alpha_A\ a) = \alpha_B\ (f\ a)$
  - given an $a_0 : A$, we choose $f : A \to A$ with $f\ x := a_0$, then:

$$a_0 = f\ (\alpha_A\ a_0) = \alpha_A\ (f\ a_0) = \alpha_A\ a_0$$

- $\alpha : (N : \mathsf{Type}) \to N \to (N \to N) \to N$ is not algebraic
- Reynolds (1983): preservation of relations:
  - $\alpha : (X : \mathsf{Type}) \to X \to X$

Parametricity

- abstract types algebraically:
  - $\alpha : (X : \mathsf{Type}) \to X \to X$ says that every type is equipped with a "set with endofunction" algebra
  - every function $f : A \to B$ is a "set with endofunction"-homomorphism, i.e. $f\,(\alpha_A\,a) = \alpha_B\,(f\,a)$
  - given an $a_0 : A$, we choose $f : A \to A$ with $f\,x := a_0$, then:

$$a_0 = f\,(\alpha_A\,a_0) = \alpha_A\,(f\,a_0) = \alpha_A\,a_0$$

- $\alpha : (N : \mathsf{Type}) \to N \to (N \to N) \to N$ is not algebraic
- Reynolds (1983): preservation of relations:
  - $\alpha : (X : \mathsf{Type}) \to X \to X$
  - every relation $R : A \to B \to \mathsf{Type}$ is preserved: $R\,a\,b \to R\,(\alpha_A\,a)\,(\alpha_B\,b)$

Parametricity

- abstract types algebraically:
  - $\alpha : (X : \mathsf{Type}) \to X \to X$ says that every type is equipped with a "set with endofunction" algebra
  - every function $f : A \to B$ is a "set with endofunction"-homomorphism, i.e. $f\ (\alpha_A\ a) = \alpha_B\ (f\ a)$
  - given an $a_0 : A$, we choose $f : A \to A$ with $f\ x := a_0$, then:

$$a_0 = f\ (\alpha_A\ a_0) = \alpha_A\ (f\ a_0) = \alpha_A\ a_0$$

- $\alpha : (N : \mathsf{Type}) \to N \to (N \to N) \to N$ is not algebraic
- Reynolds (1983): preservation of relations:
  - $\alpha : (X : \mathsf{Type}) \to X \to X$
  - every relation $R : A \to B \to \mathsf{Type}$ is preserved: $R\ a\ b \to R\ (\alpha_A\ a)\ (\alpha_B\ b)$
  - if the relation is the graph of a function: $f\ a = b \to f\ (\alpha_A\ a) = \alpha_B\ b$

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}}$$

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 :=$$

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 := (a_0 : A)(a_1 : A) \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 := (a_0 : A)(a_1 : A) \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$\mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1 :=$$

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 := (a_0 : A)(a_1 : A) \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$\mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1 := A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}$$

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 := (a_0 : A)(a_1 : A) \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$\mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1 := A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}$$

- Internal parametricity: Bernardy–Moulin (2012)

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 := (a_0 : A)(a_1 : A) \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$\mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1 := A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}$$

- Internal parametricity: Bernardy–Moulin (2012)

$$a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1$$

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 := (a_0 : A)(a_1 : A) \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$\mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1 := A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}$$

- Internal parametricity: Bernardy–Moulin (2012)

$$\frac{a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1}{{a_2}^{\mathsf{P}} : (A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1)^{\mathsf{P}}\, a_2\, a_2}$$

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 := (a_0 : A)(a_1 : A) \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$\mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1 := A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}$$

- Internal parametricity: Bernardy–Moulin (2012)

$$\cfrac{\cfrac{a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1}{{a_2}^{\mathsf{P}} : (A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1)^{\mathsf{P}}\, a_2\, a_2}}{{a_2}^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}^{\mathsf{P}}}\, a_0\, a_0\, {a_0}^{\mathsf{P}}\, a_1\, a_1\, {a_1}^{\mathsf{P}}\, a_2\, a_2}$$

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 := (a_0 : A)(a_1 : A) \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$\mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1 := A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}$$

- Internal parametricity: Bernardy–Moulin (2012)

$$\cfrac{\cfrac{a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1}{{a_2}^{\mathsf{P}} : (A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1)^{\mathsf{P}}\, a_2\, a_2}}{{a_2}^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}^{\mathsf{P}}}\, a_0\, a_0\, {a_0}^{\mathsf{P}}\, a_1\, a_1\, {a_1}^{\mathsf{P}}\, a_2\, a_2} \qquad (\lambda x . x^{\mathsf{P}}) : (x : A) \to A^{\mathsf{P}}\, x\, x$$

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 := (a_0 : A)(a_1 : A) \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$\mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1 := A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}$$

- Internal parametricity: Bernardy–Moulin (2012)

$$\frac{\dfrac{a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1}{{a_2}^{\mathsf{P}} : (A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1)^{\mathsf{P}}\, a_2\, a_2}}{{a_2}^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}\,\mathsf{P}}\, a_0\, a_0\, {a_0}^{\mathsf{P}}\, a_1\, a_1\, {a_1}^{\mathsf{P}}\, a_2\, a_2} \qquad \frac{(\lambda x.x^{\mathsf{P}}) : (x : A) \to A^{\mathsf{P}}\, x\, x}{(\lambda x.x^{\mathsf{P}})^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1\, a_2 : (A^{\mathsf{P}}\, x\, x)^{\mathsf{P}}\, {a_0}^{\mathsf{P}}\, {a_1}^{\mathsf{P}}}$$

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 := (a_0 : A)(a_1 : A) \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$\mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1 := A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}$$

- Internal parametricity: Bernardy–Moulin (2012)

$$\frac{\dfrac{a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1}{{a_2}^{\mathsf{P}} : (A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1)^{\mathsf{P}}\, a_2\, a_2}}{{a_2}^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}^{\mathsf{P}}}\, a_0\, a_0\, {a_0}^{\mathsf{P}}\, a_1\, a_1\, {a_1}^{\mathsf{P}}\, a_2\, a_2} \qquad \frac{\dfrac{(\lambda x.x^{\mathsf{P}}) : (x : A) \to A^{\mathsf{P}}\, x\, x}{(\lambda x.x^{\mathsf{P}})^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1\, a_2 : (A^{\mathsf{P}}\, x\, x)^{\mathsf{P}}\, {a_0}^{\mathsf{P}}\, {a_1}^{\mathsf{P}}}}{(\lambda x.x^{\mathsf{P}})^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1\, a_2 : A^{\mathsf{P}^{\mathsf{P}}}\, a_0\, a_1\, a_2\, a_0\, a_1\, a_2\, {a_0}^{\mathsf{P}}\, {a_1}^{\mathsf{P}}}$$

External to internal parametricity

- External parametricity: Reynolds (1983), Wadler (1989), Plotkin–Abadi (1993), Bernardy–Jansson–Paterson (2010)

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 := (a_0 : A)(a_1 : A) \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$\mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1 := A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}$$

- Internal parametricity: Bernardy–Moulin (2012)

$$\dfrac{\dfrac{a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1}{{a_2}^{\mathsf{P}} : (A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1)^{\mathsf{P}}\, a_2\, a_2}}{{a_2}^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}^{\mathsf{P}}}\, a_0\, a_0\, {a_0}^{\mathsf{P}}\, a_1\, a_1\, {a_1}^{\mathsf{P}}\, a_2\, a_2} \qquad \dfrac{\dfrac{(\lambda x.x^{\mathsf{P}}) : (x : A) \to A^{\mathsf{P}}\, x\, x}{(\lambda x.x^{\mathsf{P}})^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1\, a_2 : (A^{\mathsf{P}}\, x\, x)^{\mathsf{P}}\, {a_0}^{\mathsf{P}}\, {a_1}^{\mathsf{P}}}}{(\lambda x.x^{\mathsf{P}})^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1\, a_2 : A^{\mathsf{P}^{\mathsf{P}}}\, a_0\, a_1\, a_2\, a_0\, a_1\, a_2\, {a_0}^{\mathsf{P}}\, {a_1}^{\mathsf{P}}}$$

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{{a_1}^{\mathsf{P}}} & a_1 \\ {\scriptstyle a_2}\uparrow & {a_0}^{\mathsf{P}} & \uparrow{\scriptstyle a_2} \\ a_0 & \longrightarrow & a_0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} a_1 \\ {\scriptstyle a_2}\uparrow \\ a_0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_0 & \xrightarrow{a_2} & a_1 \\ {\scriptstyle {a_0}^{\mathsf{P}}}\uparrow & a_2 & \uparrow{\scriptstyle {a_1}^{\mathsf{P}}} \\ a_0 & \longrightarrow & a_1 \end{array}$$

Theories of internal parametricity

- Bernardy–Moulin (2012, 2013): higher dimensional syntax
- Bernardy–Coquand–Moulin (2015): substructural interval
- Nuyts–Devriese (2018): simpler semantics
- Cavallo–Harper (2021): parametricity and univalence combined
- Altenkirch–Chamoun–Kaposi–Shulman (2024): first structural theory
- Mike Shulman (2024–2026): the proof assistant Narya
- Sarah Reboullet's thesis (2025): analysis of a problem in BCM 2015
- Jem Lord (2025): internal axiomatic parametricity

Informal Narya

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

Informal Narya

$$\frac{A : \mathrm{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathrm{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$\frac{R : A \to B \to \mathrm{Type}}{\mathrm{Gel}\, R : \mathrm{Type}^{\mathsf{P}}\, A\, B} \qquad \frac{A_2 : \mathrm{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1}{A_2 : A_0 \to A_1 \to \mathrm{Type}} \qquad \mathrm{Gel}\, R\, a\, b \cong R\, a\, b$$

Informal Narya

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$\frac{R : A \to B \to \mathsf{Type}}{\mathsf{Gel}\, R : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A\, B} \qquad \frac{A_2 : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1}{A_2 : A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}} \qquad \mathsf{Gel}\, R\, a\, b \cong R\, a\, b$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 = \{a_0\, a_1 : A\} \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

Informal Narya

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$\frac{R : A \to B \to \mathsf{Type}}{\mathsf{Gel}\, R : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A\, B} \qquad \frac{A_2 : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1}{A_2 : A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}} \qquad \mathsf{Gel}\, R\, a\, b \cong R\, a\, b$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 = \{a_0\, a_1 : A\} \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$(\Sigma\, A\, B)^{\mathsf{P}}\, (a_0, b_0)\, (a_1, b_1) = \Sigma\, (a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1).B^{\mathsf{P}}\, a_2\, b_0\, b_1$$

Informal Narya

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$\frac{R : A \to B \to \mathsf{Type}}{\mathsf{Gel}\, R : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A\, B} \qquad \frac{A_2 : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1}{A_2 : A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}} \qquad \mathsf{Gel}\, R\, a\, b \cong R\, a\, b$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 = \{a_0\, a_1 : A\} \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$(\Sigma\, A\, B)^{\mathsf{P}}\, (a_0, b_0)\, (a_1, b_1) = \Sigma\, (a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1).B^{\mathsf{P}}\, a_2\, b_0\, b_1$$

$$(\lambda c.(a : A\, c) \to B\, (c, a))^{\mathsf{P}}\, c_2\, f_0\, f_1 = (a_2 : A^{\mathsf{P}}\, c_2\, a_0\, a_1) \to B^{\mathsf{P}}\, (c_2, a_2)\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

Informal Narya

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$\frac{R : A \to B \to \mathsf{Type}}{\mathsf{Gel}\, R : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A\, B} \qquad \frac{A_2 : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1}{A_2 : A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}} \qquad \mathsf{Gel}\, R\, a\, b \cong R\, a\, b$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 = \{a_0\, a_1 : A\} \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$(\Sigma\, A\, B)^{\mathsf{P}}\, (a_0, b_0)\, (a_1, b_1) = \Sigma\, (a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1).B^{\mathsf{P}}\, a_2\, b_0\, b_1$$

$$(\lambda c.(a : A\, c) \to B\, (c, a))^{\mathsf{P}}\, c_2\, f_0\, f_1 = (a_2 : A^{\mathsf{P}}\, c_2\, a_0\, a_1) \to B^{\mathsf{P}}\, (c_2, a_2)\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$x^{\mathsf{P}} = x_2 \qquad (\lambda x.\, t)^{\mathsf{P}} = \lambda\{x_0\}\{x_1\}x_2.\, t^{\mathsf{P}} \qquad (t\, u)^{\mathsf{P}} = t^{\mathsf{P}}\, u^{\mathsf{P}}$$

Informal Narya

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$\frac{R : A \to B \to \mathsf{Type}}{\mathsf{Gel}\, R : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A\, B} \qquad \frac{A_2 : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1}{A_2 : A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}} \qquad \mathsf{Gel}\, R\, a\, b \cong R\, a\, b$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 = \{a_0\, a_1 : A\} \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$(\Sigma\, A\, B)^{\mathsf{P}}\, (a_0, b_0)\, (a_1, b_1) = \Sigma\, (a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1).B^{\mathsf{P}}\, a_2\, b_0\, b_1$$

$$(\lambda c.(a : A\, c) \to B\, (c, a))^{\mathsf{P}}\, c_2\, f_0\, f_1 = (a_2 : A^{\mathsf{P}}\, c_2\, a_0\, a_1) \to B^{\mathsf{P}}\, (c_2, a_2)\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$x^{\mathsf{P}} = x_2 \qquad (\lambda x.\, t)^{\mathsf{P}} = \lambda\{x_0\}\{x_1\}x_2.\, t^{\mathsf{P}} \qquad (t\, u)^{\mathsf{P}} = t^{\mathsf{P}}\, u^{\mathsf{P}}$$

$$\frac{a_{22} : A^{\mathsf{PP}}\, a_{02}\, a_{12}\, a_{20}\, a_{21}}{\mathsf{sym}\, a_{22} : A^{\mathsf{PP}}\, a_{20}\, a_{21}\, a_{02}\, a_{12}} \qquad \mathsf{sym}\, (\mathsf{sym}\, a_{22}) = a_{22} \qquad \ldots$$

Informal Narya

$$\frac{A : \mathsf{Type}}{A^{\mathsf{P}} : A \to A \to \mathsf{Type}} \qquad \frac{a : A}{a^{\mathsf{P}} : A^{\mathsf{P}}\, a\, a}$$

$$\frac{R : A \to B \to \mathsf{Type}}{\mathsf{Gel}\, R : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A\, B} \qquad \frac{A_2 : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, A_0\, A_1}{A_2 : A_0 \to A_1 \to \mathsf{Type}} \qquad \mathsf{Gel}\, R\, a\, b \cong R\, a\, b$$

$$(A \to B)^{\mathsf{P}}\, f_0\, f_1 = \{a_0\, a_1 : A\} \to A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1 \to B^{\mathsf{P}}\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$(\Sigma\, A\, B)^{\mathsf{P}}\, (a_0, b_0)\, (a_1, b_1) = \Sigma\, (a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1).B^{\mathsf{P}}\, a_2\, b_0\, b_1$$

$$(\lambda c.(a : A\, c) \to B\, (c, a))^{\mathsf{P}}\, c_2\, f_0\, f_1 = (a_2 : A^{\mathsf{P}}\, c_2\, a_0\, a_1) \to B^{\mathsf{P}}\, (c_2, a_2)\, (f_0\, a_0)\, (f_1\, a_1)$$

$$x^{\mathsf{P}} = x_2 \qquad (\lambda x.\, t)^{\mathsf{P}} = \lambda\{x_0\}\{x_1\}x_2.\, t^{\mathsf{P}} \qquad (t\, u)^{\mathsf{P}} = t^{\mathsf{P}}\, u^{\mathsf{P}}$$

$$\frac{a_{22} : A^{\mathsf{PP}}\, a_{02}\, a_{12}\, a_{20}\, a_{21}}{\mathsf{sym}\, a_{22} : A^{\mathsf{PP}}\, a_{20}\, a_{21}\, a_{02}\, a_{12}} \qquad \mathsf{sym}\, (\mathsf{sym}\, a_{22}) = a_{22} \qquad \ldots$$

whiteboard example: polymorphic identity

Iteration → induction

$$\begin{aligned} &\mathsf{data}\,\mathbb{N} &&: \mathsf{Type} \\ &\quad \mathsf{zero} &&: \mathbb{N} \\ &\quad \mathsf{suc} &&: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathsf{ite}_{\mathbb{N}} : (A : \mathsf{Type}) \to A \to (A \to A) \to \mathbb{N} \to A \\ &\mathsf{ite}_{\mathbb{N}}\, A\, z\, s\, \mathsf{zero} = z \\ &\mathsf{ite}_{\mathbb{N}}\, A\, z\, s\, (\mathsf{suc}\, n) = s\, (\mathsf{ite}_{\mathbb{N}}\, A\, z\, s\, n) \end{aligned}$$

Iteration → induction

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{data}\ \mathbb{N} &&: \mathsf{Type} \\
&\quad \mathsf{zero} &&: \mathbb{N} \\
&\quad \mathsf{suc} &&: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
&\mathsf{data}\ \mathbb{N}^{\mathsf{P}} &&: \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\ \mathbb{N}\ \mathbb{N} \\
&\quad \mathsf{zero}^{\mathsf{P}} &&: \mathbb{N}^{\mathsf{P}}\ \mathsf{zero}\ \mathsf{zero} \\
&\quad \mathsf{suc}^{\mathsf{P}} &&: \mathbb{N}^{\mathsf{P}}\ n_0\ n_1 \\
& &&\to \mathbb{N}^{\mathsf{P}}\ (\mathsf{suc}\ n_0)\ (\mathsf{suc}\ n_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{ite}_{\mathbb{N}} : (A : \mathsf{Type}) \to A \to (A \to A) \to \mathbb{N} \to A \\
&\mathsf{ite}_{\mathbb{N}}\ A\ z\ s\ \mathsf{zero} = z \\
&\mathsf{ite}_{\mathbb{N}}\ A\ z\ s\ (\mathsf{suc}\ n) = s\ (\mathsf{ite}_{\mathbb{N}}\ A\ z\ s\ n) \\
&\mathsf{ite}_{\mathbb{N}^{\mathsf{P}}} : (A^P : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\ \mathbb{N}\ \mathbb{N}) \to A^P\ \mathsf{zero}\ \mathsf{zero} \\
&\quad \to (A^P\ n_0\ n_1 \to A^P\ (\mathsf{suc}\ n_0)\ (\mathsf{suc}\ n_1)) \to \mathbb{N}^{\mathsf{P}}\ n_0\ n_1 \\
&\quad \to A^P\ n_0\ n_1 \\
&\mathsf{ite}_{\mathbb{N}^{\mathsf{P}}}\ A^P\ z^P\ s^P\ \mathsf{zero}^{\mathsf{P}} = z^P \\
&\mathsf{ite}_{\mathbb{N}^{\mathsf{P}}}\ A^P\ z^P\ s^P\ (\mathsf{suc}^{\mathsf{P}}\ n^P) = s^P\ (\mathsf{ite}_{\mathbb{N}^{\mathsf{P}}}\ A^P\ z^P\ s^P\ n^P)
\end{aligned}
$$

Iteration ⟶ induction

$$\begin{aligned}
&\mathsf{data}\ \mathbb{N} &&: \mathsf{Type} \\
&\quad \mathsf{zero} &&: \mathbb{N} \\
&\quad \mathsf{suc} &&: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
&\mathsf{data}\ \mathbb{N}^{\mathsf{P}} &&: \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\ \mathbb{N}\ \mathbb{N} \\
&\quad \mathsf{zero}^{\mathsf{P}} &&: \mathbb{N}^{\mathsf{P}}\ \mathsf{zero}\ \mathsf{zero} \\
&\quad \mathsf{suc}^{\mathsf{P}} &&: \mathbb{N}^{\mathsf{P}}\ n_0\ n_1 \\
& &&\to \mathbb{N}^{\mathsf{P}}\ (\mathsf{suc}\ n_0)\ (\mathsf{suc}\ n_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{ite}_{\mathbb{N}} : (A : \mathsf{Type}) \to A \to (A \to A) \to \mathbb{N} \to A \\
&\mathsf{ite}_{\mathbb{N}}\ A\ z\ s\ \mathsf{zero} = z \\
&\mathsf{ite}_{\mathbb{N}}\ A\ z\ s\ (\mathsf{suc}\ n) = s\ (\mathsf{ite}_{\mathbb{N}}\ A\ z\ s\ n) \\
&\mathsf{ite}_{\mathbb{N}^{\mathsf{P}}} : (A^P : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\ \mathbb{N}\ \mathbb{N}) \to A^P\ \mathsf{zero}\ \mathsf{zero} \\
&\qquad \to (A^P\ n_0\ n_1 \to A^P\ (\mathsf{suc}\ n_0)\ (\mathsf{suc}\ n_1)) \to \mathbb{N}^{\mathsf{P}}\ n_0\ n_1 \\
&\qquad \to A^P\ n_0\ n_1 \\
&\mathsf{ite}_{\mathbb{N}^{\mathsf{P}}}\ A^P\ z^P\ s^P\ \mathsf{zero}^{\mathsf{P}} = z^P \\
&\mathsf{ite}_{\mathbb{N}^{\mathsf{P}}}\ A^P\ z^P\ s^P\ (\mathsf{suc}^{\mathsf{P}}\ n^P) = s^P\ (\mathsf{ite}_{\mathbb{N}^{\mathsf{P}}}\ A^P\ z^P\ s^P\ n^P)
\end{aligned}$$

$$\mathsf{ind}_{\mathbb{N}} : (P : \mathbb{N} \to \mathsf{Type}) \to P\ \mathsf{zero} \to (P\ n \to P\ (\mathsf{suc}\ n)) \to (n : \mathbb{N}) \to P\ n$$

$$\mathsf{ind}_{\mathbb{N}}\ P\ z^P\ s^P\ n :=$$

$$\underbrace{\mathsf{ite}_{\mathbb{N}^{\mathsf{P}}}\ (\mathsf{Glue}\ (n_0\ n_1 \mapsto P\ n_0))\ \underbrace{z^P}_{:\ \underbrace{\mathsf{Glue}\ (n_0\ n_1 \mapsto P\ n_0)\ \mathsf{zero}\ \mathsf{zero}}_{\cong P\ \mathsf{zero}}}\ \underbrace{(n^P \mapsto s^P\ n^P)}_{:\ \underbrace{\mathsf{Glue}\ (n_0\ n_1 \mapsto P\ n_0)\ n_0\ n_1}_{\cong P\ n_0} \to \underbrace{\mathsf{Glue}\ (n_0\ n_1 \mapsto P\ n_0)\ (\mathsf{suc}\ n_0)\ (\mathsf{suc}\ n_1)}_{\cong P\ (\mathsf{suc}\ n_0)}}\ n^P}_{:\mathsf{Glue}\ (n_0\ n_1 \mapsto P\ n_0)\ n\ n\ \cong\ P\ n}$$

Semi-cubical types*

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{codata}\ \mathsf{T} : \mathsf{Type}\\
&\quad \mathsf{ty} : \mathsf{T} \longrightarrow \mathsf{Type}\\
&\quad \mathsf{rel} : (x : \mathsf{T}) \longrightarrow \mathsf{T}^{\mathsf{P}}\, x\, x\\
&\mathsf{codata}\ \mathsf{T}^{\mathsf{P}} : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, \mathsf{T}\, \mathsf{T}\\
&\quad \mathsf{ty}^{\mathsf{P}} : (\mathsf{T} \longrightarrow \mathsf{Type})^{\mathsf{P}}\, \mathsf{ty}\, \mathsf{ty}\\
&\quad \mathsf{rel}^{\mathsf{P}} : ((x : \mathsf{T}) \longrightarrow \mathsf{T}^{\mathsf{P}}\, x\, x)^{\mathsf{P}}\, \mathsf{rel}\, \mathsf{rel}\\
&\mathsf{codata}\ \mathsf{T}^{\mathsf{PP}} : (\mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, \mathsf{T}\, \mathsf{T})^{\mathsf{P}}\, \mathsf{T}^{\mathsf{P}}\, \mathsf{T}^{\mathsf{P}}\\
&\quad \mathsf{ty}^{\mathsf{PP}} : ((\mathsf{T} \longrightarrow \mathsf{Type})^{\mathsf{P}}\, \mathsf{ty}\, \mathsf{ty})^{\mathsf{P}}\, \mathsf{ty}^{\mathsf{P}}\, \mathsf{ty}^{\mathsf{P}}\\
&\quad \mathsf{rel}^{\mathsf{PP}} : (((x : \mathsf{T}) \longrightarrow \mathsf{T}^{\mathsf{P}}\, x\, x)^{\mathsf{P}}\, \mathsf{rel}\, \mathsf{rel})^{\mathsf{P}}\, \mathsf{rel}^{\mathsf{P}}\, \mathsf{rel}^{\mathsf{P}}\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Semi-cubical types*

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{codata}\ \mathsf{T} : \mathsf{Type}\\
&\quad \mathsf{ty} : \mathsf{T} \to \mathsf{Type}\\
&\quad \mathsf{rel} : (x : \mathsf{T}) \to \mathsf{T}^{\mathsf{P}}\, x\, x\\
&\mathsf{codata}\ \mathsf{T}^{\mathsf{P}} : \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, \mathsf{T}\, \mathsf{T}\\
&\quad \mathsf{ty}^{\mathsf{P}} : \mathsf{T}^{\mathsf{P}}\, x_0\, x_1 \to \mathsf{Type}^{\mathsf{P}}\, (\mathsf{ty}\, x_0)\, (\mathsf{ty}\, x_1)\\
&\quad \mathsf{rel}^{\mathsf{P}} : (x_2 : \mathsf{T}^{\mathsf{P}}\, x_0\, x_1) \to \mathsf{T}^{\mathsf{PP}}\, x_2\, x_2\, (\mathsf{rel}\, x_0)\, (\mathsf{rel}\, x_1)\\
&\mathsf{codata}\ \mathsf{T}^{\mathsf{PP}} : \mathsf{Type}^{\mathsf{PP}}\, \mathsf{T}^{\mathsf{P}}\, \mathsf{T}^{\mathsf{P}}\, \mathsf{T}^{\mathsf{P}}\, \mathsf{T}^{\mathsf{P}}\\
&\quad \mathsf{ty}^{\mathsf{PP}} : \mathsf{T}^{\mathsf{PP}}\, x_{02}\, x_{12}\, x_{20}\, x_{21} \to \mathsf{Type}^{\mathsf{PP}}\, (\mathsf{ty}^{\mathsf{P}}\, x_{02})\, (\mathsf{ty}^{\mathsf{P}}\, x_{12})\, (\mathsf{ty}^{\mathsf{P}}\, x_{20})\, (\mathsf{ty}^{\mathsf{P}}\, x_{21})\\
&\quad \mathsf{rel}^{\mathsf{PP}} : (x_{22} : \mathsf{T}^{\mathsf{PP}}\, x_{02}\, x_{12}\, x_{20}\, x_{21}) \to \mathsf{T}^{\mathsf{PPP}}\, x_{22}\, x_{22}\, (\mathsf{rel}^{\mathsf{P}}\, x_{02})\, (\mathsf{rel}^{\mathsf{P}}\, x_{12})\, (\mathsf{rel}^{\mathsf{P}}\, x_{20})\, (\mathsf{rel}^{\mathsf{P}}\, x_{21})\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Fibrancy

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{codata\ isFib} : \mathsf{Type} \to \mathsf{Type} \\
&\quad \mathsf{coe} \quad : \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1 \to A_0 \to A_1 \\
&\quad \mathsf{coh} \quad : (f_2 : \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_0 : A_0) \to A_2\, a_0\, (\mathsf{coe}\, f_2\, a_0) \\
&\quad \mathsf{coe}^{-1} \quad : \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1 \to A_1 \to A_0 \\
&\quad \mathsf{coh}^{-1} \quad : (f_2 : \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_1 : A_1) \to A_2\, (\mathsf{coe}^{-1}\, f_2\, a_1)\, a_1 \\
&\quad \mathsf{id} \quad : (f_2 : \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_0 : A_0)(a_1 : A_1) \to \mathsf{isFib}\, (A_2\, a_0\, a_1)
\end{aligned}
$$

Fibrancy

$$
\begin{aligned}
&\text{codata isFib} : \text{Type} \to \text{Type} \\
&\quad \text{coe} \quad : \text{isFib}^{\text{P}}\, A_2\, f_0\, f_1 \to A_0 \to A_1 \\
&\quad \text{coh} \quad : (f_2 : \text{isFib}^{\text{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_0 : A_0) \to A_2\, a_0\, (\text{coe}\, f_2\, a_0) \\
&\quad \text{coe}^{-1} : \text{isFib}^{\text{P}}\, A_2\, f_0\, f_1 \to A_1 \to A_0 \\
&\quad \text{coh}^{-1} : (f_2 : \text{isFib}^{\text{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_1 : A_1) \to A_2\, (\text{coe}^{-1}\, f_2\, a_1)\, a_1 \\
&\quad \text{id} \quad : (f_2 : \text{isFib}^{\text{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_0 : A_0)(a_1 : A_1) \to \text{isFib}\, (A_2\, a_0\, a_1)
\end{aligned}
$$

$$\text{Fib} := \Sigma\, \text{Type}\, \text{isFib}$$

Fibrancy

$$
\begin{array}{ll}
\text{codata isFib} & : \text{Type} \longrightarrow \text{Type} \\
\quad \text{coe} & : \text{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 \\
\quad \text{coh} & : (f_2 : \text{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_0 : A_0) \longrightarrow A_2\, a_0\, (\text{coe}\, f_2\, a_0) \\
\quad \text{coe}^{-1} & : \text{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_0 \\
\quad \text{coh}^{-1} & : (f_2 : \text{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_1 : A_1) \longrightarrow A_2\, (\text{coe}^{-1}\, f_2\, a_1)\, a_1 \\
\quad \text{id} & : (f_2 : \text{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_0 : A_0)(a_1 : A_1) \longrightarrow \text{isFib}\, (A_2\, a_0\, a_1)
\end{array}
$$

$$\text{Fib} := \Sigma\, \text{Type}\, \text{isFib}$$

$$
\cfrac{\cfrac{A : \text{Type} \qquad f : \text{isFib}\, A}{f^{\mathsf{P}} : \text{isFib}^{\mathsf{P}}\, A^{\mathsf{P}}\, f\, f}}{\text{coe}\, f^{\mathsf{P}} : A \longrightarrow A}
$$

Two-dimensional Kan fillers

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{codata\ isFib} : \mathsf{Type} \to \mathsf{Type} \\
&\quad \mathsf{coe} \quad : \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1 \to A_0 \to A_1 \\
&\quad \mathsf{coh} \quad : (f_2 : \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_0 : A_0) \to A_2\, a_0\, (\mathsf{coe}\, f_2\, a_0) \\
&\quad \mathsf{id} \quad : (f_2 : \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_0 : A_0)(a_1 : A_1) \to \mathsf{isFib}\, (A_2\, a_0\, a_1)
\end{aligned}
$$

(also in the other direction)

Two-dimensional Kan fillers

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{codata\ isFib} : \mathsf{Type} \to \mathsf{Type}\\
&\quad \mathsf{coe} \quad : \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1 \to A_0 \to A_1 \qquad \text{(also in the other direction)}\\
&\quad \mathsf{coh} \quad : (f_2 : \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_0 : A_0) \to A_2\, a_0\, (\mathsf{coe}\, f_2\, a_0)\\
&\quad \mathsf{id} \quad : (f_2 : \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_0 : A_0)(a_1 : A_1) \to \mathsf{isFib}\,(A_2\, a_0\, a_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{id}^{\mathsf{P}} : (f_{22} : \mathsf{isFib}^{\mathsf{PP}}\, A_{22}\, f_{02}\, f_{12}\, f_{20}\, f_{21})(a_{02} : A_{02}\, a_{00}\, a_{01})(a_{12} : A_{12}\, a_{10}\, a_{11})\\
&\to \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\, (A_{22}\, a_{02}\, a_{12})\, (\mathsf{id}\, f_{20}\, a_{00}\, a_{10})\, (\mathsf{id}\, f_{21}\, a_{01}\, a_{11})
\end{aligned}
$$

Two-dimensional Kan fillers

$$\begin{array}{lll}
\text{codata isFib} & : \text{Type} \longrightarrow \text{Type} & \\
\quad \text{coe} & : \text{isFib}^{\text{P}}\, A_2\, f_0\, f_1 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 & \text{(also in the other direction)} \\
\quad \text{coh} & : (f_2 : \text{isFib}^{\text{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_0 : A_0) \longrightarrow A_2\, a_0\, (\text{coe}\, f_2\, a_0) & \\
\quad \text{id} & : (f_2 : \text{isFib}^{\text{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_0 : A_0)(a_1 : A_1) \longrightarrow \text{isFib}\, (A_2\, a_0\, a_1) &
\end{array}$$

$$\text{id}^{\text{P}} : (f_{22} : \text{isFib}^{\text{PP}}\, A_{22}\, f_{02}\, f_{12}\, f_{20}\, f_{21})(a_{02} : A_{02}\, a_{00}\, a_{01})(a_{12} : A_{12}\, a_{10}\, a_{11})$$
$$\longrightarrow \text{isFib}^{\text{P}}\, (A_{22}\, a_{02}\, a_{12})\, (\text{id}\, f_{20}\, a_{00}\, a_{10})\, (\text{id}\, f_{21}\, a_{01}\, a_{11})$$

$$\frac{\dfrac{f : \text{isFib}\, A}{f^{\text{PP}} : \text{isFib}^{\text{PP}}\, A^{\text{PP}}\, f^{\text{P}}\, f^{\text{P}}\, f^{\text{P}}\, f^{\text{P}}} \qquad a_{02} : A^{\text{P}}\, a_{00}\, a_{01} \qquad a_{12} : A^{\text{P}}\, a_{10}\, a_{11}}{\text{coe}\, (\text{id}^{\text{P}}\, f^{\text{PP}}\, a_{02}\, a_{12}) : A^{\text{P}}\, a_{00}\, a_{10} \longrightarrow A^{\text{P}}\, a_{01}\, a_{11}}$$

Two-dimensional Kan fillers

$$\begin{array}{lll}
\text{codata isFib} & : \text{Type} \longrightarrow \text{Type} & \\
\quad \text{coe} & : \text{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 & \text{(also in the other direction)} \\
\quad \text{coh} & : (f_2 : \text{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_0 : A_0) \longrightarrow A_2\, a_0\, (\text{coe}\, f_2\, a_0) & \\
\quad \text{id} & : (f_2 : \text{isFib}^{\mathsf{P}}\, A_2\, f_0\, f_1)(a_0 : A_0)(a_1 : A_1) \longrightarrow \text{isFib}\, (A_2\, a_0\, a_1) &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\text{id}^{\mathsf{P}} : (f_{22} : \text{isFib}^{\mathsf{PP}}\, A_{22}\, f_{02}\, f_{12}\, f_{20}\, f_{21})(a_{02} : A_{02}\, a_{00}\, a_{01})(a_{12} : A_{12}\, a_{10}\, a_{11}) \\
&\longrightarrow \text{isFib}^{\mathsf{P}}\, (A_{22}\, a_{02}\, a_{12})\, (\text{id}\, f_{20}\, a_{00}\, a_{10})\, (\text{id}\, f_{21}\, a_{01}\, a_{11})
\end{aligned}$$

$$\frac{\dfrac{f : \text{isFib}\, A}{f^{\mathsf{PP}} : \text{isFib}^{\mathsf{PP}}\, A^{\mathsf{PP}}\, f^{\mathsf{P}}\, f^{\mathsf{P}}\, f^{\mathsf{P}}\, f^{\mathsf{P}}} \qquad a_{02} : A^{\mathsf{P}}\, a_{00}\, a_{01} \qquad a_{12} : A^{\mathsf{P}}\, a_{10}\, a_{11}}{\text{coe}\, (\text{id}^{\mathsf{P}}\, f^{\mathsf{PP}}\, a_{02}\, a_{12}) : A^{\mathsf{P}}\, a_{00}\, a_{10} \longrightarrow A^{\mathsf{P}}\, a_{01}\, a_{11}}$$

$$\begin{array}{ccc}
a_{01} & & a_{11} \\
{\scriptstyle a_{02}}\uparrow & \Uparrow & \uparrow{\scriptstyle a_{12}} \\
a_{00} & \xrightarrow[a_{20}]{} & a_{10}
\end{array}$$

Identity type

$$\frac{(A, f) : \mathsf{Fib}}{\begin{array}{l}\mathsf{Id}_{A,f} : A \to A \to \mathsf{Fib} \\ \mathsf{Id}_{A,f}\, a_0\, a_1 := (A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1, \mathsf{id}\, f^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1)\end{array}}$$

Identity type

$$\frac{(A, f) : \mathsf{Fib}}{\begin{array}{l}\mathsf{Id}_{A,f} : A \longrightarrow A \longrightarrow \mathsf{Fib} \\ \mathsf{Id}_{A,f}\, a_0\, a_1 := (A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1, \mathsf{id}\, f^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1)\end{array}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B : A \longrightarrow \mathsf{Fib}}{\mathsf{snd} \circ B : (a : A) \longrightarrow \mathsf{isFib}\,(B\, a)} \qquad a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1}{(\mathsf{snd} \circ B)^{\mathsf{P}}\, a_2 : \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\, (B^{\mathsf{P}}\, a^{\mathsf{P}})\, (\mathsf{snd}\, (B\, a_0))\, (\mathsf{snd}\, (B\, a_1))}}{\mathsf{transport}_B\, a_2 := \mathsf{coe}\, ((\mathsf{snd} \circ B)^{\mathsf{P}}\, a_2) : \mathsf{fst}\, (B\, a_0) \longrightarrow \mathsf{fst}\, (B\, a_1)}$$

Identity type

$$\frac{(A, f) : \mathsf{Fib}}{\begin{array}{l}\mathsf{Id}_{A,f} : A \longrightarrow A \longrightarrow \mathsf{Fib} \\ \mathsf{Id}_{A,f}\, a_0\, a_1 := (A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1, \mathsf{id}\, f^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1)\end{array}}$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{B : A \longrightarrow \mathsf{Fib}}{\mathsf{snd} \circ B : (a : A) \longrightarrow \mathsf{isFib}\,(B\,a)} \qquad a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1}{(\mathsf{snd} \circ B)^{\mathsf{P}}\, a_2 : \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\,(B^{\mathsf{P}}\, a^{\mathsf{P}})\,(\mathsf{snd}\,(B\,a_0))\,(\mathsf{snd}\,(B\,a_1))}}{\mathsf{transport}_B\, a_2 := \mathsf{coe}\,((\mathsf{snd} \circ B)^{\mathsf{P}}\, a_2) : \mathsf{fst}\,(B\,a_0) \longrightarrow \mathsf{fst}\,(B\,a_1)}$$

Assume $a : A$.

$$(\Sigma(x : A).A^{\mathsf{P}}\, a\, x)^{\mathsf{P}}\,(a, a^{\mathsf{P}})\,(b, e) = \Sigma(x_2 : A^{\mathsf{P}}\, a\, b).A^{\mathsf{PP}}\, a^{\mathsf{P}}\, x_2\, a^{\mathsf{P}}\, e$$

Identity type

$$\frac{(A, f) : \mathsf{Fib}}{\begin{array}{l}\mathsf{Id}_{A,f} : A \longrightarrow A \longrightarrow \mathsf{Fib} \\ \mathsf{Id}_{A,f}\, a_0\, a_1 := (A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1, \mathsf{id}\, f^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1)\end{array}}$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{B : A \longrightarrow \mathsf{Fib}}{\mathsf{snd} \circ B : (a : A) \longrightarrow \mathsf{isFib}\,(B\, a)} \qquad a_2 : A^{\mathsf{P}}\, a_0\, a_1}{(\mathsf{snd} \circ B)^{\mathsf{P}}\, a_2 : \mathsf{isFib}^{\mathsf{P}}\, (B^{\mathsf{P}}\, a^{\mathsf{P}})\, (\mathsf{snd}\,(B\, a_0))\, (\mathsf{snd}\,(B\, a_1))}}{\mathsf{transport}_B\, a_2 := \mathsf{coe}\,((\mathsf{snd} \circ B)^{\mathsf{P}}\, a_2) : \mathsf{fst}\,(B\, a_0) \longrightarrow \mathsf{fst}\,(B\, a_1)}$$

Assume $a : A$.

$$(\Sigma(x : A).A^{\mathsf{P}}\, a\, x)^{\mathsf{P}}\, (a, a^{\mathsf{P}})\, (b, e) = \Sigma(x_2 : A^{\mathsf{P}}\, a\, b).A^{\mathsf{PP}}\, a^{\mathsf{P}}\, x_2\, a^{\mathsf{P}}\, e$$

$$\begin{array}{ccc} a & \dashrightarrow & b \\ {\scriptstyle a^{\mathsf{P}}}\uparrow & \Uparrow & \uparrow{\scriptstyle e} \\ a & \xrightarrow[a^{\mathsf{P}}]{} & a \end{array}$$

Fib closed under $\top$, $\bot$, $\times$, Σ, Π, Bool

$$\frac{\begin{array}{lll} F & : \mathrm{Type} \longrightarrow \mathrm{Type} & \\ coe & : F^{\mathrm{P}}\, C_2\, f_0\, f_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow C_1 & \text{(also in other dir.)} \\ coh & : (f_2 : F^{\mathrm{P}}\, C_2\, f_0\, f_1)(c_0 : C_0) \longrightarrow C_2\, c_0\, (coe\, f_2\, c_0) & \\ id & : F^{\mathrm{P}}\, C_2\, f_0\, f_1 \longrightarrow (c_0 : C_0)(c_1 : C_1) \longrightarrow F\, (C_2\, c_0\, c_1) & \end{array}}{\mathrm{gen}_{\mathrm{isFib}} : (A : \mathrm{Type}) \longrightarrow F\, A \longrightarrow \mathrm{isFib}\, A}$$

Fib closed under $\top$, $\bot$, $\times$, Σ, Π, Bool

$$
\frac{\begin{array}{lll}
F & : \mathsf{Type} \to \mathsf{Type} & \\
\mathit{coe} & : F^{\mathsf{P}}\, C_2\, f_0\, f_1 \to C_0 \to C_1 & \text{(also in other dir.)} \\
\mathit{coh} & : (f_2 : F^{\mathsf{P}}\, C_2\, f_0\, f_1)(c_0 : C_0) \to C_2\, c_0\, (\mathit{coe}\, f_2\, c_0) & \\
\mathit{id} & : F^{\mathsf{P}}\, C_2\, f_0\, f_1 \to (c_0 : C_0)(c_1 : C_1) \to F\, (C_2\, c_0\, c_1) &
\end{array}}{\mathsf{gen}_{\mathsf{isFib}} : (A : \mathsf{Type}) \to F\, A \to \mathsf{isFib}\, A}
$$

whiteboard

Fib closed under $\top$, $\bot$, $\times$, Σ, Π, Bool

$$\frac{\begin{array}{ll} F & : \mathsf{Type} \to \mathsf{Type} \\ coe & : F^{\mathsf{P}}\, C_2\, f_0\, f_1 \to C_0 \to C_1 \qquad \text{(also in other dir.)} \\ coh & : (f_2 : F^{\mathsf{P}}\, C_2\, f_0\, f_1)(c_0 : C_0) \to C_2\, c_0\, (coe\, f_2\, c_0) \\ id & : F^{\mathsf{P}}\, C_2\, f_0\, f_1 \to (c_0 : C_0)(c_1 : C_1) \to F\, (C_2\, c_0\, c_1) \end{array}}{\mathsf{gen}_{\mathsf{isFib}} : (A : \mathsf{Type}) \to F\, A \to \mathsf{isFib}\, A}$$

whiteboard

Lemma: $\cong^{\mathsf{P}}\ A_2\, B_2\, e_0\, e_1 \to (a_0 : A_0)(a_1 : A_1) \to A_2\, a_0\, a_1 \cong B_2\, (e_0\, a_0)\, (e_1\, a_1)$.

Fib closed under W and M

$$\frac{\begin{array}{ll} S & : \mathsf{Type} \\ \mathsf{P} & : S \longrightarrow \mathsf{Type} \end{array}}{\begin{array}{ll} \mathsf{W} & : \mathsf{Type} \\ \mathsf{sup} & : (s : S) \longrightarrow (P\,s \longrightarrow \mathsf{W}) \longrightarrow \mathsf{W} \end{array}}$$

Fib closed under W and M

$$\frac{\begin{array}{ll} S & : \mathsf{Type} \\ \mathsf{P} & : S \to \mathsf{Type} \end{array}}{\begin{array}{ll} \mathsf{W} & : \mathsf{Type} \\ \mathsf{sup} & : (s : S) \to (P\, s \to \mathsf{W}) \to \mathsf{W} \end{array}}$$

Indexed W-types:

$$\frac{\begin{array}{ll} I & : \mathsf{Type} \\ S & : \mathsf{Type} \\ P & : S \to \mathsf{Type} \\ j & : \{s : S\} \to P\, s \to I \\ k & : S \to I \end{array}}{\begin{array}{ll} \mathsf{W} & : I \to \mathsf{Type} \\ \mathsf{sup} & : (s : S) \to ((p : P\, s) \to \mathsf{W}\,(j\, p)) \\ & \to \mathsf{W}\,(k\, s) \end{array}}$$

Non-uniform parameterised W-types:

$$\frac{\begin{array}{ll} I & : \mathsf{Type} \\ S & : I \to \mathsf{Type} \\ P & : \{i : I\} \to S\, i \to \mathsf{Type} \\ k & : \{i : I\}\{s : S\, i\} \to P\, i\, s \to I \end{array}}{\begin{array}{ll} \mathsf{W} & (i : I) : \mathsf{Type} \\ \mathsf{sup} & : (s : S\, i) \to ((p : P\, s) \to \mathsf{W}\,(k\, p)) \\ & \to \mathsf{W}\, i \end{array}}$$

Univalence

$$\text{is11}\;(R : A \to B \to \text{Fib}) := \big((a : A) \to \text{isContr}\,(\Sigma(b : B).\text{R}\,a\,b)\big) \times$$
$$\big((b : B) \to \text{isContr}\,(\Sigma(a : A).\text{R}\,a\,b)\big)$$

Univalence

$$\text{is11}\,(R : A \to B \to \text{Fib}) := \big((a : A) \to \text{isContr}\,(\Sigma(b : B).\text{R}\,a\,b)\big) \times \big((b : B) \to \text{isContr}\,(\Sigma(a : A).\text{R}\,a\,b)\big)$$

$$\text{codata isBisim}\,(R : A \to B \to \text{Fib}) : \text{Type}$$

$$\text{coe} : \text{isBisim}\,R \to A \to B$$

(also in the other direction)

$$\text{coh} : (x : \text{isBisim}\,R)(a : A) \to R\,a\,(\text{coe}\,x\,a)$$

$$\text{id} : \text{isBisim}^{\text{R}}\,R_2\,x_0\,x_1 \to (r_0 : R_0\,a_0\,b_0)(r_1 : R_1\,a_1\,b_1) \to \text{isBisim}\,(a_2\,b_2 \mapsto R_2\,a_2\,b_2\,r_0\,r_1)$$

Univalence

$$\mathsf{is11}\,(R : A \to B \to \mathsf{Fib}) := \big((a : A) \to \mathsf{isContr}\,(\Sigma(b : B).\mathsf{R}\,a\,b)\big) \times$$
$$\big((b : B) \to \mathsf{isContr}\,(\Sigma(a : A).\mathsf{R}\,a\,b)\big)$$

$\mathsf{codata}\;\mathsf{isBisim}\,(R : A \to B \to \mathsf{Fib}) : \mathsf{Type}$

$\quad \mathsf{coe} : \mathsf{isBisim}\,R \to A \to B$ (also in the other direction)

$\quad \mathsf{coh} : (x : \mathsf{isBisim}\,R)(a : A) \to R\,a\,(\mathsf{coe}\,x\,a)$

$\quad \mathsf{id} \quad : \mathsf{isBisim}^{\mathsf{R}}\,R_2\,x_0\,x_1 \to (r_0 : R_0\,a_0\,b_0)(r_1 : R_1\,a_1\,b_1) \to \mathsf{isBisim}\,(a_2\,b_2 \mapsto R_2\,a_2\,b_2\,r_0\,r_1)$

$$\mathsf{is11} \longrightarrow \mathsf{isBisim} \underset{R\,:=\,\mathsf{id}}{\overset{\mathsf{Gel}\,R}{\rightleftarrows}} \mathsf{Fib}^{\mathsf{P}}\,A_0\,A_1$$

Univalence

$$\text{is11}\,(R : A \to B \to \text{Fib}) := \big((a : A) \to \text{isContr}\,(\Sigma(b : B).\text{R}\,a\,b)\big) \times$$
$$\big((b : B) \to \text{isContr}\,(\Sigma(a : A).\text{R}\,a\,b)\big)$$

codata $\text{isBisim}\,(R : A \to B \to \text{Fib}) : \text{Type}$

$\text{coe} : \text{isBisim}\,R \to A \to B$ (also in the other direction)

$\text{coh} : (x : \text{isBisim}\,R)(a : A) \to R\,a\,(\text{coe}\,x\,a)$

$\text{id} \quad : \text{isBisim}^{\text{R}}\,R_2\,x_0\,x_1 \to (r_0 : R_0\,a_0\,b_0)(r_1 : R_1\,a_1\,b_1) \to \text{isBisim}\,(a_2\,b_2 \mapsto R_2\,a_2\,b_2\,r_0\,r_1)$

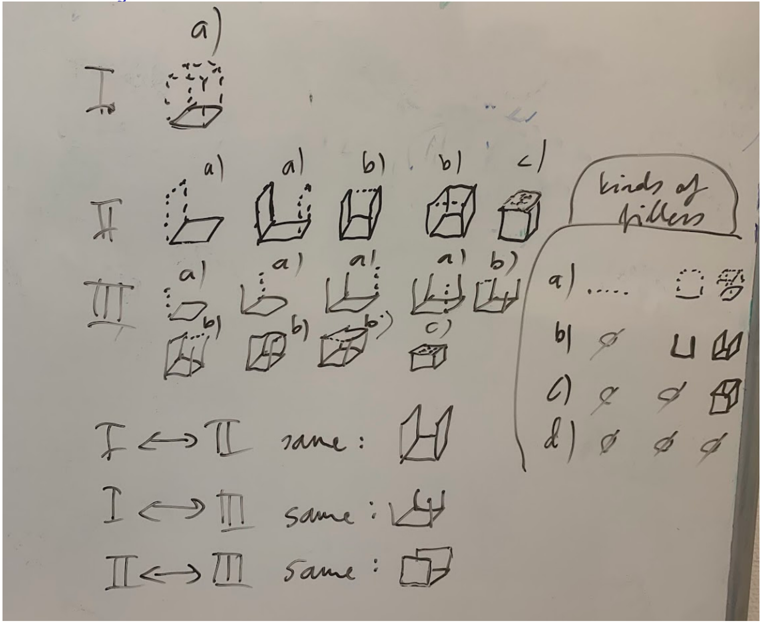
$$\dfrac{\begin{array}{ccc} B_0 & \xrightarrow{\;B_2\;} & B_1 \\ R_0, \text{is11}\uparrow & R_2, \text{is11}^{\text{P}} & \uparrow R_1, \text{is11} \\ A_0 & \xrightarrow[\;A_2\;]{} & A_1 \end{array}}{\text{is11}\,(a_2\,b_2 \mapsto R_2\,a_2\,b_2\,r_0\,r_1)}$$

$$\text{is11} \longrightarrow \text{isBisim} \underset{R\,:=\,\text{id}}{\overset{\text{Gel}\,R}{\rightleftarrows}} \text{Fib}^{\text{P}}\,A_0\,A_1$$

Summary

- Narya: a proof assistant with internal parametricity
  - polymorphic identity
  - iterator $\rightarrow$ induction, with definitional computation rulesa
    - symmetric inductive and coinductive types
  - semi-cubical types*
  - higher coinductive types, fibrancy
    - fibrant families come with transport
    - $\top$, $\bot$, $\times$, Σ, Π, Bool, W, M fibrant
    - definitional univalence
- Future:
  - $\mathsf{isFib}\,\mathsf{Fib}$,
  - normalisation
  - higher inductive types

Uniformity


a)
I
II
III
kinds of fillers
a) ....
b) Ø
c) Ø Ø
d) Ø Ø Ø
I ⟷ II same :
I ⟷ III same :
II ⟷ III same :